SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

MÉTHODE DE CRAMER

Méthode de Cramer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & -2 & 54 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & -3 & 2 & 52 \end{array}\right]$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 54 & -7 & -2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 52 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 54 & -2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 52 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 & 54 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & -3 & 52 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}$$

OBJECTIF

Programmer une feuille d'Excel pour résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues par la méthode de Cramer.

Mise en situation

Résoudre le système d'équations suivant par la méthode de Cramer :

$$\begin{aligned} 3x - 7y - 2z &= 54 \\ 2x + 3y + 5z &= 7 \\ 4x - 3y + 2z &= 52. \end{aligned}$$

Préparer une feuille de calcul qui soit réutilisable, pour résoudre des systèmes analogues, en modifiant simplement la valeur des coefficients et des constantes.

03Methode-Cramer

Valider une entrée

Calcul du déterminant

ACTION

1. Ouvrir l'application Excel et entrer les éléments de la matrice augmentée dans la plage A6:D8.
2. Sélectionner la cellule A10 et taper « det(A) = », puis valider en enfonçant la touche Tabulateur. La cellule B10 est maintenant activée ; choisir l'option Insertion < Nom < Définir. Dans le tableau qui s'affiche, le logiciel suggère le nom « det_A » ; cliquer sur OK. La cellule B10 est toujours sélectionnée, taper la fonction
   « =DETERMAT(A6:C8) »,
   puis valider. Le calcul s'effectue et la valeur « –13 » s'affiche dans la cellule.
3. Sélectionner la cellule A12 et définir le test :
   « =SI(det_A=0;"Le déterminant est nul, la méthode de Cramer doit être adaptée.";"Le déterminant est non nul, la méthode de Cramer s'applique directement.") ». Valider. La mention appropriée s'affiche dans la cellule.

Commentaire

Pour calculer le déterminant d'une matrice, on sélectionne une cellule, de taper « = d » et choisir « determat » dans le menu proposé par Excel. On sélectionne à l'aide de la souris la plage de la matrice et on valide. Sur la feuille de calcul, l'écriture dans la cellule A10, à l'étape 2, permet, lors d'une utilisation ultérieure, de se remémorer ce que représente la valeur calculée en B10.
On donne à cette cellule le nom « det_A ». Cela indique au logiciel dans quelle cellule il doit lire la valeur de « det_A » si ce nom est inclus dans une formule.
À l'étape 3, on effectue sur le résultat du calcul du déterminant un test de la forme
= SI(detA=0; valeur si vrai; valeur si faux)
Donc, si la valeur qui s'affiche dans la cellule nommée det_A est égale à 0, le logiciel exécute l'instruction représentée par « valeur si vrai » et, dans le cas contraire, il exécute l'instruction représentée par « valeur si faux ». Dans le cas présent, le logiciel doit écrire un texte, c'est ce que lui indiquent les signes « " " ». Le texte entre ces signes est celui qui s'affiche à l'écran.

Calcul des valeurs

ACTION

1. Dans la cellule A15, écrire « detAX = », valider.
2. Sélectionner la plage de cellules B14:B16, définir « =D6:D8 » et **valider comme opération matricielle**.
3. Sélectionner la plage de cellules C14:D16, définir « =B6:C8 » et **valider comme opération matricielle**.

9	Matrice associée			
10	3	–7	–2	54
11	2	3	5	7
12	4	–3	2	52

Commentaire

Les étapes 2 et 3 ont comme résultat l'écriture de la matrice dont le déterminant est la valeur du numérateur dans l'expression de x par la méthode de Cramer.
Il est important de valider comme opération matricielle, sinon Excel ne fera le calcul que dans la première cellule de la plage.

4. Donner le nom « detAX » à la cellule F15 et définir

   « =DETERMAT(B17:D19) »,

   puis valider. Le calcul s'effectue et la valeur « –234 » s'affiche dans la cellule.

5. Sélectionner la cellule H15 et taper « x = », puis valider en enfonçant la touche Tabulateur. La cellule G20 étant sélectionnée, taper « =detAX/det_A », puis valider. Le logiciel effectue le calcul et affiche la valeur « 18 ». Répéter les étapes précédentes pour calculer les valeurs de y et de z. La solution du système est (18; 2; –7).

Commentaire

La feuille de calcul est réutilisable, car, si on modifie les éléments de la matrice A6:D8, le logiciel refait les calculs et affiche les nouveaux résultats.

Exercices

Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la feuille programmée.

1. $2x + 3y - 4z = -41$
   $4x - 3y + 2z = -7$
   $3x + 2y - 6z = -74$
   (–4; 5; 12)
2. $x + 4y - 7z = -60$
   $5x - 4y + 2z = 53$
   $9x + 3y - 2z = -4$
   (3; –7; 5)
3. $x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -82$
   $5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 54$
   $9x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -19$
   (2; –7; 8)
4. $2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 42$
   $4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 7$
   $3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 25$
   (6; –9; –5)
5. $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 53$
   $5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4$
   $3x_1 - 7x_2 + 6x_3 = -49$
   (Le déterminant est nul, la méthode de Cramer ne s'applique pas directement. On pourrait utiliser la démarche pour résoudre un système comportant moins d'équations que d'inconnues en plaçant une équation en réserve.)

Préparer une feuille de calcul permettant de résoudre un système de quatre équations à quatre inconnues par la méthode de Cramer, puis utiliser cette feuille pour résoudre les systèmes d'équations suivants.

6. $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -5$
   $3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 34$
   $5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 = -29$
   $4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -7$
   (8; –5; 6; –12)
7. $x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 189$
   $2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 224$
   $7x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 59$
   $8x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 19$
   (–14; 25; 8; 32)