

# SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

## MÉTHODE DE GAUSS-JORDAN

### Méthode de Gauss-Jordan

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & -7 & 10 \\ 5 & 2 & -4 & 52 \end{array} \right] \approx \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right]$$

#### OBJECTIF

Programmer une feuille d'Excel pour résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues par la méthode de Gauss-Jordan.

## Mise en situation

Résoudre le système d'équations suivant par la méthode de Gauss-Jordan.

$$2x - 3y + 4z = 24$$

$$3x + 2y - 7z = 10$$

$$5x + 2y - 4z = 52$$

Préparer la feuille de calcul de manière qu'elle soit réutilisable pour résoudre des systèmes analogues en modifiant simplement la valeur des coefficients et des constantes.

### 02A Méthode-Gauss-Jordan

#### Entrée des éléments de la matrice

##### ACTION

1. Ouvrir l'application Excel et, dans la plage de cellules A6:D8, entrer les éléments de la matrice augmentée.

#### Commentaire

La matrice du système est

9	Matrice associée			
10	2	-3	4	24
11	3	2	-7	10
12	5	2	-4	52

#### Réduction de la première colonne

##### ACTION

1. Dans la cellule A10, écrire « Réduction, première colonne » et valider. Dans la plage A11:D11, définir « = A6:D6 » et **valider comme opération matricielle** :
2. Sélectionner la plage de cellules A12:D12 et y définir « =A6\*A7:D7-A7\*A6:D6 », **valider comme opération matricielle (voir vidéo)**.
3. Sélectionner la plage de cellules A13:D13, définir « =A6\*A8:D8-A8\*A6:D6 » et **valider comme opération matricielle**.

#### Commentaire

Pour réduire la première colonne, le pivot est l'élément de la cellule A6.

Pour inclure dans une formule la valeur affichée dans une cellule, il suffit de cliquer sur celle-ci. Si on veut effectuer des opérations sur tous les éléments d'une plage, il suffit d'inclure cette plage dans la définition de la formule en la sélectionnant avec la souris. Après la validation de l'étape 3, Excel devrait afficher la matrice suivante dans la plage A11:D13.

17	Première colonne			
18	2	-3	4	24
19	0	13	-26	-52
20	0	19	-28	-16

#### Réduction de la deuxième colonne

##### ACTION

1. Dans la cellule A15 et écrire « Réduction, deuxième colonne » et valider. Dans la plage A16:D16, définir « =B12\*A11:D11-B11\*A12:D12 » et **valider comme opération matricielle**.
2. Dans la plage A17:D17, définir « =A12:D12 », **valider comme opération matricielle**.
3. Dans la plage de cellules A18:D18, définir « =B12\*A13:D13-B13\*A12:D12 », **valider comme opération matricielle**.

#### Commentaire

À la deuxième étape de la réduction, on veut que la deuxième ligne demeure inchangée et que les autres soient réduites de manière à obtenir une matrice diagonale. Le pivot est l'élément de la deuxième ligne de la deuxième colonne, affiché dans la cellule B12.

Après la deuxième étape, Excel devrait afficher la matrice suivante dans les cellules A26:D28.

25	Deuxième colonne			
26	26	0	-26	156
27	0	13	-26	-52
28	0	0	130	780

### Réduction de la troisième colonne

#### ACTION

1. En A20, écrire « Réduction, troisième colonne ». En A21:D21, définir « =C18\*A16:D16-C16\*A18:D18 », **valider comme opération matricielle**.
2. Dans la plage de cellules A22:D22, définir « =C18\*A17:D17-C17\*A18:D18 », **valider comme opération matricielle**.
3. Sélectionner la plage de cellules A23:D23, définir « =A18:D18 », **valider comme opération matricielle**.

#### Commentaire

Lors de la réduction de la troisième colonne, la troisième ligne demeure inchangée et les autres sont réduites. Il faut donc faire apparaître des 0 dans les cellules hors diagonale de la troisième colonne. Excel devrait afficher la matrice suivante dans la plage A21:D23.

32	Troisième colonne			
33	3 380	0	0	40 560
34	0	1 690	0	13 520
35	0	0	130	780

### Solution du système

#### ACTION

1. En A25, écrire « Solution du système ». Dans la plage A26:D26, définir « =A21:D21/A21 », **valider comme opération matricielle**.
2. En A27:D27, définir « =A22:D22/B22 », **valider comme opération matricielle**.
3. En A28:D28, définir « =A23:D23/B23 », **valider comme opération matricielle**.

#### Commentaire

La colonne des constantes donne maintenant la solution du système d'équations. Les valeurs des cellules de la plage D26:D28 donne la solution du système, soit (12; 8; 6).

38	Solution du système			
39	1	0	0	12
40	0	1	0	8
41	0	0	1	6

Il est à noter que seuls les éléments de la matrice augmentée peuvent être changés. Excel refuse de changer un élément obtenu par une opération matricielle.

### Exercices

Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la feuille programmée.

1.  $2x + 3y - 4z = -41$   
 $4x - 3y + 2z = -7$   
 $3x + 2y - 6z = -74$   
 Rép. : (-4; 5; 12)
2.  $x + 4y - 7z = -60$   
 $5x - 4y + 2z = 53$   
 $9x + 3y - 2z = -4$   
 Rép. : (3; -7; 5)
3.  $2x + 3y - 3z = -15$   
 $4x - 3y + 2z = 28$   
 $2x - 6y + 5z = 43$   
 Rép. :  $x = (t + 13)/6$ ,  $y = (8t - 58)/9$ ,  $z = t$
4.  $x + 4y - 7z = -25$   
 $5x - 4y + 2z = 34$   
 $3x - 12y + 16z = 84$   
 Rép. :  $x = (5t + 9)/6$ ,  $y = (37t - 159)/24$ ,  $z = t$
5.  $2x + 4y - 5z = -1$   
 $3x - 3y + 6z = 48$   
 $x - 7y + 11z = 12$   
 Rép. : (aucune solution)
6.  $3x - 7y - 2z = -27$   
 $8x + 4y + 5z = -35$   
 $4x + 11y - 12z = 53$   
 Rép. : (-4; 3; -3)