**Возможные решения задач**

**2018/2019**

**9 класс**

**9-1.** **«Мост»** Запишем закон равноускоренного движения поезда по мосту длиной $l$ в первом случае

$l=υ\_{0}t\_{1}+\frac{at\_{1}^{2}}{2}$ , (1)

где $a$ – модуль ускорения поезда.

 Для второго случая (поезд притормаживает) аналогичное уравнение имеет вид

$l=υ\_{0}t\_{2}-\frac{at\_{2}^{2}}{2}$ . (2)

 Искомое время $t\_{3}$ равномерного движения поезда найдем как

 $t\_{3}=\frac{l}{υ\_{0}}$. (3)

 Из системы уравнений (1)-(2) можно выразить отношение $\frac{l}{υ\_{0}}$. Для этого следует в (1) – (2) избавиться от членов, содержащих ускорение $a$. Умножим (1) на $t\_{2}^{2}$, а (2) , соответственно, на $t\_{1}^{2}$ и сложим полученные равенства

$l \left(t\_{2}^{2}+ t\_{1}^{2}\right)=υ\_{0}t\_{1}t\_{2}^{2}+\frac{at\_{1}^{2}t\_{2}^{2}}{2}+υ\_{0}t\_{2}t\_{1}^{2}-\frac{at\_{2}^{2}t\_{1}^{2}}{2}$ $⟹$ (4)

$\frac{l}{υ\_{0}}=\frac{(t\_{1}t\_{2}^{2}+t\_{2}t\_{1}^{2})}{t\_{2}^{2}+ t\_{1}^{2}}$*.* (5)

 Таким образом, окончательная формула для $t\_{3}$ принимает вид

$t\_{3}=\frac{l}{υ\_{0}}=\frac{(t\_{1}+t\_{2})t\_{1}t\_{2}}{t\_{2}^{2}+ t\_{1}^{2}}$*.* (6)

Расчёт по приведенным данным даёт

$t\_{3}=36 с$ . (7)

Рис. 1

**9-2.** **«Ом в кубе»** Рассмотрим всевозможные способы подключения каркасного куба к омметру, одна из клемм которого (например, «земля») постоянно подключена к вершине $A$ куба (Рис. 1).

Начнём расчеты с самой «дальней» вершины $F$, которая лежит на диагонали куба (см. Рис. 1). В силу симметрии в этом случае вершины $B,D,H $ куба являются эквипотенциальными, и их можно соединить. Это же рассуждение справедливо и для вершин $C,E,G$ куба, т.е. их также можно соединить. Тогда эквивалентная цепь будет иметь вид, представленный на рисунке 2. Такой вариант соединения имеет сопротивление

Рис. 2

$R\_{AF}=\frac{r}{3}+\frac{r}{6}+\frac{r}{3}=\frac{5}{6}r=\frac{10}{12}r$ . (1)

Перейдем к вершинам $C, E, G$ куба, которые лежат на диагоналях квадратов, являющихся гранями куба. В силу симметрии, сопротивления куба при этих подключениях будут одинаковы

$R\_{AC}=R\_{AE}=R\_{AG}$ . (2)

Для определённости рассмотрим вершину $G$ куба. В этом случае пары точек $C,D$ и $E,H$ являются эквипотенциальными, т.к. лежат на «середине пути» от клеммы к клемме. Напряжение между эквипотенциальными точками равно нулю, следовательно, ребра $CD$ и $EH$ схемы можно опустить, поскольку ток по ним не идёт. Схема эквивалентной цепи в этом случае будет иметь вид, представленный на Рис 3.

*G*

*A*

Рис. 3

Сопротивление куба при таком подключении рассчитывается стандартными методами

$R\_{AG}=\frac{3r ∙ r}{3r+r}=\frac{3}{4}r=\frac{9}{12}r$ . (3)

*F*

*E*

*C*

*B*

*D*

*A*

Рис. 4

Последний тип возможного подключения второго контакта – подключение к соседней вершине ребра куба (точки $B,D,H$). Возьмём для определённости случай подключения к вершине $D$ куба. Здесь можно соединить эквипотенциальные пары точек $C,G$ и $B,H$ цепи и мысленно «сплющить» схему. Тогда схема эквивалентной цепи в этом случае будет иметь вид, представленный на рисунке 4. Тогда сопротивление куба в этом случае, опять же, сводится к аккуратным вычислениям параллельных и последовательных соединений

$R\_{BC}=\frac{2r ∙ r/2}{2r+r/2}=\frac{2}{5}r$ , (4)

$R\_{AD}=\frac{(R\_{BC}+r) ∙ r}{(R\_{BC}+r)+r}=\frac{7}{12}r$ . (5)

Анализируя полученные выражения (1), (3) и (5) для различных сопротивлений, расположим их в порядке возрастания, тогда получим

 $R\_{1}=7,0 Ом=\frac{7}{12}r$ , $R\_{3}=9,0 Ом=\frac{9}{12}r$ , $R\_{2}=10 Ом=\frac{10}{12}r$. (6)

Из (6) находим электрическое сопротивление ребра куба

$r=12 Ом$ . (7)

Далее несложно указать, каким вершинам куба соответствуют полученные сопротивления

$$R\_{1}=7,0 Ом \rightarrow B,D,H$$

$R\_{3}=9,0 Ом \rightarrow C,E,G$ (8)

 $R\_{2}=10 Ом \rightarrow F$ *.*

*O2*

*O1*

*T4*

*T3*

*mg*

*2m*

*2*

*1*

*2mg*

*2mg*

**9-3.**  **«Постоянная планка»** Данную задачу удобно решать, рассматривая планку и грузы вместе, как единое целое. Изобразим внешние силы, действующие на систему «планка + грузы» в данной механической системе. Обозначим силы натяжения нитей, на которых висят блоки $\vec{T}\_{3}$ и $\vec{T}\_{4}$ (Рис. 5).

Поскольку силы натяжения нитей с грузами $\vec{T}\_{1}$ и $\vec{T}\_{2} $ являются внутренними, то в данном случае их можно не рассматривать (их сумма, так же как сил реакции и давления, равна нулю).

Так как система находится в равновесии, то можно применить правило рычага (моментов) относительно точек $O\_{1}$ и $O\_{2}$, лежащих на линии действия сил натяжения нитей, за которые подвешены блоки. Пусть одному делению масштабной шкалы соответствует расстояние $a$. Тогда, согласно правилу рычага (моментов) получим уравнения для искомых сил. Для точки $O\_{1}$

 $2mg∙a+ mg∙3a+2mg∙7a-T\_{4}∙6a=0$ . (1)

Относительно второй точки ($O\_{2}$) имеем похожее уравнение

$T\_{3}∙6a- 2mg∙5a- mg∙3a+2mg∙a=0$ . (2)

Из полученной системы уравнений (1) – (2) находим

$T\_{4}=\frac{19}{6}mg$ , $T\_{3}=\frac{11}{6}mg$. (3)

Соответственно, силы натяжения нитей, удерживающих грузы

$T\_{1}=\frac{T\_{3}}{2}=\frac{11}{12}mg$ , (4)

$T\_{2}=\frac{T\_{4}}{2}=\frac{19}{12}mg$ . (5)

Силы, действующие на груз, найдем из условия равенства нулю равнодействующей силы для каждого из грузов

$N\_{1}=2mg-T\_{1}=\frac{13}{12}mg$ , (6)

$N\_{2}=2mg-T\_{2}=\frac{5}{12}mg$ . (7)

Расчёт для приведенных данных даёт следующее значение

$T\_{1}=\frac{11}{12}mg=10,8 Н$ , (8)

$N\_{2}=\frac{5}{12}mg=4,91 Н$ . (9)

Подчеркнем, что точки $O\_{1}$ и $O\_{2}$ можно выбирать различными способами (например, на осях грузов). Вид системы уравнений при этом несколько усложняется

$T\_{1}∙2a+ mg∙2a- T\_{2}∙4a+(2mg-T\_{2})∙6a=0$ , (10)

$T\_{1}∙8a-(2 mg-T\_{1})∙6a- mg∙4a+T\_{2}∙2a=0$ , (11)

но ответы, разумеется, получаются те же ((4), (5)). Это и понятно, ведь все правильные способы решения (в отличие от неправильных!) ведут к одному и тому же ответу.



**9-4.** **«Стертая линза»** Для нахождения оптического центра линзы попарно соединим точки $A$ и $A^{'}$, $B$ и $B^{'}$. Точка пересечения отрезков (Рис. 6) даст нам положение оптического центра $ C$ линзы. Из построения следует, что его координаты

$C (11;-3)$. (1)

Для нахождения положения линзы нужна еще одна точка, поскольку прямую по одной точке не проведешь. Для этого продолжим стрелки $AB$ и $A^{'}B^{'}$ до пересечения, это и даст вторую точку $E $линзы. Отрезок $EC$ даст нам положение линзы. Восстанавливая перпендикуляр $CG$ к $EC$ из точки $C$, найдем положение главной оптической оси $CG$ линзы.

Для нахождения главных фокусов тонкой линзы воспользуемся свойствами лучей, параллельных главной оптической оси. Из точек $A$ и $A^{'}$ проведём прямые, параллельные главной оптической оси $CG$ линзы. После преломления в линзе они пройдут через точки её главных фокусов $F\_{1}$ и $F\_{2}$ . Как следует из построения, ближайшие к главным фокусам узлы сетки имеют координаты

$F\_{1} (10;0)$, (2)

$F\_{2} (12;-6)$. (3)

Поскольку предмет $AB$ и его изображение $A^{'}B^{'}$ находятся по разные стороны от оптической оси линзы, то она является собирающей (положительной). В соответствии с таблицей изображений для собирающей линзы изображение $A^{'}B^{'}$ является действительным, обратным и уменьшенным.

Для оценки оптической силы линзы примем, что её главные фокусы находятся в точках ближайших узлов сетки. По теореме Пифагора найдем фокусное расстояние (несколько с избытком)

$F=d\_{0}\sqrt{(3^{2}+1^{2})}=3,2 см$. (4)

Тогда искомая оптическая сила линзы

$D=\frac{1}{F}=\frac{1}{3,2∙10^{-2}м}=31 дптр$. (5)

Поскольку оценка является приближенной, необходимо её погрешность. Для этого возьмем расстояние до следующего соседнего узла сетки (несколько с недостатком)

$F=d\_{0}\sqrt{(2^{2}+1^{2})}=2,2 см \rightarrow D=\frac{1}{2,2∙10^{-2}м}=45 дптр$. (6)

Используя метод границ, запишем окончательный результат

$F=\left(38\pm 7\right) дптр, ε=18 \%$. (7)

Достаточно большая погрешность оценки оптической силы линзы обусловлена крупной клеткой на чертеже, которая не позволяет более точно определить фокусное расстояние линзы.

**9-5.** **«Спасательный канат»** Груз перестает тонуть потому, что сила Архимеда, действующая на него и на канат, по мере погружения груза увеличивается быстрее силы тяжести системы. Соответственно, в какой-то момент сила Архимеда становится равной силе тяжести системы

$mg=F\_{A}$ . (1)

Обозначим массу погруженной в воду части каната $m\_{1}$ , а массу груза – $m\_{2}$. Тогда масса системы $m=m\_{1}+m\_{2}$ , а силу Архимеда запишем с учётом объёмов воды, вытесненной как канатом ($V\_{1}=m\_{1}/ρ\_{1}$), так и грузом ($V\_{2}=m\_{2}/ρ\_{2}$)

$\left(m\_{1}+m\_{2}\right)g=ρ\_{0}g\left(V\_{1}+V\_{2}\right)$ . $⟹$ (2)

$m\_{1}+m\_{2}=ρ\_{0}\left(\frac{m\_{1}}{ρ\_{1}}+\frac{m\_{2}}{ρ\_{2}}\right)$ . (3)

Из (3) после несложных алгебраических преобразований получаем

 $ρ\_{2}=\frac{ρ\_{0}ρ\_{1}m\_{2}}{ρ\_{1}\left(m\_{1}+m\_{2}\right)-m\_{1}ρ\_{0}}$ . (4)

Поскольку в нашем случае $m\_{1}=m\_{2}$, то формула (4) принимает вид

$ρ\_{2}=\frac{ρ\_{0}ρ\_{1}}{2ρ\_{1}-ρ\_{0}}=8,83∙10^{3} \frac{кг}{м^{3}}$ . (5)

Судя по полученному значению плотности материала (от школьников не требуется!), данный груз изготовлен из какого-то медного сплава (например, никелина), поскольку плотность чистой меди $ρ\_{м}=8,96∙10^{3} кг/м^{3}$ очень близка к полученному значению.