**Возможные решения задач**

**2018/2019**

**11 класс**

**11-1.** **«Трёхмерное движение»** Рассмотрим движение материальной точки в плоскости $xOy$ по приведенным в условии законам

$x\left(t\right)=A \cos(ωt)$ (1)

 $y\left(t\right)=A \sin(ωt)$. (2)

Используем аналогию между колебательным и вращательным движением по окружности. Пусть материальная точка равномерно вращается по окружности радиуса $R=A$ (Рис. 12) с угловой скоростью $ω$ против часовой стрелки из начального положения $B (A;0)$. Тогда её линейная скорость движения равна $υ=ωR=ωA$. За промежуток времени $t$ точка повернется на угол $φ=ωt$, а её координаты $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$ в момент времени $t$ будут совпадать с (1) и (2).

𝜐

$$φ$$

$$A$$

*x*

*y*

$$O$$

Рис. 12

Следовательно, движение точки $B$ в данной плоскости является равномерным вращением вокруг точки начала координат со скоростью $υ=ωA$. Соответственно, проекции мгновенной скорости точки на оси координат через промежуток времени $t$ найдём из чертежа

 $υ\_{x}\left(t\right)=- ωA \sin(ωt)$, (3)

 $υ\_{y}\left(t\right)=ωA \cos(ωt)$. (4)

Движение точки $B$ вдоль оси $ Oz$ описывается зависимостью

 $z\left(t\right)=Aωt$ , (5)

т.е. является равномерным со скоростью

 $υ\_{z}(t)=Aω$. (6)

Мысленно «совмещая» два движения, получаем, что точка $B$ движется по винтовой линии (Рис. 13), ось которой совпадает с осью $Oz$ декартовой системы координат. Винтовая линия (иногда, не совсем корректно её называют «спиралью») характеризуется радиусом $R$ и шагом $h$ (см. Рис. 13). В нашем случае её характерные особенности



Рис. 13

$R=A$, а $h=υ\_{z}T=υ\_{z}\frac{2π}{ω}=2πA$ , (7)

где $T=\frac{2π}{ω}=1,00 с$ – период обращения точки по окружности.

Используя «трёхмерную» теорему Пифагора найдем модуль скорости $υ\left(t\right)$ материальной точки в момент времени $t$

$υ\left(t\right)=\sqrt{υ\_{x}^{2}+υ\_{y}^{2}+υ\_{z}^{2}}$ . (8)

Подставляя в (8) выражения для скоростей (3), (4) и (6) получим

$υ\left(t\right)=\sqrt{\left(- ωA \sin(ωt)\right)^{2}+\left(ωA \cos(ωt)\right)^{2}+\left(Aω\right)^{2}}=\sqrt{2}ωA$. (9)

Как следует из (9), данное движение материальной точки является равномерным (и криволинейным), поскольку $υ\left(t\right)=const$. Следовательно, искомый путь материальной точки

$l=υt=\sqrt{2}ωAt=1,33 м$. (10)

Поскольку за промежуток времени $t\_{1}=1,00 с$ материальная точка сделает ровно один оборот, то модуль её перемещения равен шагу винтовой линии

$S=\left|\vec{S}\right|=h=2πA=94,2 см$. (11)

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные расчёты приводим с точностью до трёх значащих цифр.

**11-2.** **«Гибкая цепочка»** В первом случае (нить привязана в точке $B$ цепочки), цепочка движется поступательно, следовательно, её можно заменить грузом массой $m$, который скользит по гладкой горизонтальной поверхности. В этом случае движение системы будет равноускоренным (Рис. 14 а)).

*B*

*A*

*C*

$$m$$

$$2m$$

$$l$$

$$2m$$

*A*

*B*

*а)*

*б)*

$$Рис. 14$$

 Ускорение $a$ системы в этом случае найдем из второго закона Ньютона, записанного для движения груза и цепочки. Поскольку нить нерастяжима и невесома, то модули ускорений и модули сил упругости нити для цепочки и для гири одинаковы ($a\_{1}=a\_{2}=a , T\_{1}=T\_{2}=T $) . Следовательно

$ma=T$ , (1)

$2ma=2mg-T$ , (2)

где – $T$ модуль силы упругости (натяжения) нити.

Решение системы (1) – (2) даёт

$a=\frac{2m}{2m+m}g=\frac{2}{3}g$ , (3)

$T=\frac{2}{3}mg$. (4)

Следовательно, время $t\_{1}$, за которое гиря опустится на расстояние $l$ , найдем из равенства

$l=\frac{at\_{1}^{2}}{2} ⟹ t\_{1}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$ . (5)

Во втором случае (нить привязана в точке $A$ цепочки) цепочка при движении начинает заворачиваться, и при этом изменяется её импульс, поскольку одна часть цепочки уже движется, а вторая – ещё нет (Рис. 14 а)).

Для таких систем (систем с переменной массой) вместо традиционной формы записи основного закона динамики ($\vec{F}=m\vec{a}$) следует использовать более общую форму – импульсную

*С*









$$Рис. 15$$

$\vec{F}=\frac{∆\vec{P}}{∆t}$ ⟹ $\vec{F}∆t=∆\vec{P}$, (6)

где – $∆\vec{P}$ изменение импульса системы за промежуток времени $∆t$.

Пусть на конец $A$ цепочки (Рис. 15) действует постоянная сила $\vec{F}$, направленная вправо. Заметим, что если конец $A$ нерастяжимой цепочки под действием силы движется с некоторой скоростью $υ$, то точка её перегиба $C$ (см. Рис. 15) движется со скоростью $\frac{υ}{2}$ . Следовательно, за промежуток времени $t$ в движение со скоростью $υ$ придет часть цепочки массой $∆m=\frac{m}{l}∙\frac{υ}{2}t$. Импульс этой подвижной части цепочки к моменту времени $t$ будет равен изменению импульса $∆P$ системы

 $∆P=∆mυ=\frac{m}{l}∙\frac{υ^{2}}{2}t$ . (7)

Подставляя (7) в (6), получаем

$Ft=\frac{m}{l}∙\frac{υ^{2}}{2}t$ , (8)

откуда находим скорость $υ$ установившегося движения конца $A$ цепочки

 $υ=\sqrt{\frac{2lF}{m}}$ . (9)

В нашем случае $F=2mg$ , следовательно

$υ=2\sqrt{gl}$ . (10)

Пренебрегая временем установления скорости (что вполне допустимо для цепочек с «мелким» звеном), найдём искомое время $t\_{2}$

 $t\_{2}=\frac{l}{υ}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ . (11)

Из сравнения (11) и (5) получаем окончательный ответ

$t\_{2}=\frac{t\_{1}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}t\_{1}=0,29 t\_{1}$ . (12)

**11-3.** **«Двойной математический маятник»** Отклоним двойной математический маятник на угол $α$ от вертикали. Поскольку при этом мы совершаем работу по поднятию грузов, то потенциальная энергия системы увеличится на

 $\vec{}$

$$\vec{υ} $$

$$M$$

$$m$$

$$α$$

$$\vec{V} $$

$$Рис. 16$$

$E^{п}=mg∆h+Mg∆H=(ml+ML)g(1-\cos(α))$ . (1)

Если отпустить маятник, то он придет в движение, в процессе которого его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию вращательного движения. Соответственно, в нижней точке колебаний для кинетической энергии системы можем записать

$$m$$

$$M$$

$$\vec{υ}\_{1}$$

$$\vec{υ}\_{2}$$

$E^{к}=\frac{mυ^{2}}{2}+\frac{MV^{2}}{2}=\frac{ω^{2}}{2}(ml^{2}+ML^{2})$ . (2)

Согласно закону сохранения энергии приравняем (1) и (2) и выразим угловую скорость вращения двойного математического маятника в нижней точке траектории

$$α$$

$$m$$

$$M$$

$$\vec{υ}\_{1}$$

$$\vec{υ}\_{2}$$

$ω=\sqrt{\frac{2g(1-\cos(α))(ml+ML)}{ml^{2}+ML^{2}}}$ . (3)

Подберём длину $l^{\*}$ математического маятника таким образом, чтобы в нижней точке (а значит и в любой!) траектории его угловая скорость вращения была равна (3) (т.н. «синхронный» математический маятник). Тогда период малых колебаний синхронного математического маятника будет равен периоду колебаний рассматриваемого маятника.

Повторяя рассуждения, аналогичные (1) – (2), для математического маятника получим

$ω=\sqrt{\frac{2g(1-\cos(α))}{l}}$ . (4)

Сравнивая (3) и (4), находим, что длина синхронного маятника в данном случае равна

 $l^{\*}=\frac{ml^{2}+ML^{2}}{ml+ML}$ . (5)

Следовательно, период колебаний двойного математического маятника равен

$T=2π\sqrt{\frac{l^{\*}}{g}}$ = $2π\sqrt{\frac{ml^{2}+ML^{2}}{\left(ml+ML\right)g}}$ . (6)

Расчёт по формуле (6) для данных, приведенных в условии, даёт

$T=2,7 с$. (7)

**11-4.** **«Лестничные циклы»** Для нахождения коэффициента полезного действия

$$E$$

$$D$$

$$C$$

$$B$$

$$V/V\_{0}$$

$$3$$

$$2$$

$$N+1$$

$$p/p\_{0}$$

$$N+1$$

$$1$$

$$3$$

*0*

$$2$$

$$1$$

Рис. 17

 $η=\frac{A}{Q\_{1}}$

цикла необходимо вычислить работу $A$, совершенную газом за весь цикл и количество теплоты $Q\_{1}$, полученное идеальным одноатомным газом от нагревателя.

 Учитывая, что площадь одного треугольника на рисунке $A\_{0}=\frac{p\_{0}V\_{0}}{2}$ , то работа газа за весь цикл

 $A=\frac{p\_{0}V\_{0}}{2} N$ . (1)

 Для нахождения количества теплоты $Q\_{1}$ воспользуемся первым началом термодинамики

$Q\_{1}=∆U+A$ , (2)

где $∆U$ – изменение внутренней энергии газа на участке, где работает нагреватель, а $A$ – работа газа на этом же участке.

 Работа газа равна площади трапеции $ BCDE$, отмеченной на рисунке

$A=\frac{p\_{0}+(N+1)p\_{0}}{2}NV\_{0}=\frac{N(N+2)}{2}p\_{0}V\_{0}$ . (3)

Изменение внутренней энергии идеального одноатомного газа на этом участке

$∆U=\frac{3}{2}νRT\_{2}-\frac{3}{2}νRT\_{1}=\frac{3}{2}\left(N+1\right)^{2}p\_{0}V\_{0}-\frac{3}{2}p\_{0}V\_{0}=\frac{3}{2}p\_{0}V\_{0}N(N+2)$ . (4)

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем окончательную формулу

$η=\frac{A}{Q\_{1}}=\frac{\frac{p\_{0}V\_{0}}{2} N }{2p\_{0}V\_{0}N(N+2)}=\frac{1}{4(N+2)}$ . (5)

При $N=8 $ получаем

$η\_{1}=\frac{1}{4(N+2)}=2,5 \%$ . (6)

Как следует из (6) , $КПД$ такого цикла достаточно мал и примерно равен $КПД$ плохонького паровоза…☺

**11-5.** **«Одноразовый ускоритель»** Поскольку конденсатор заряжен, то по цепи пойдет электрический ток, который будет уменьшать заряд $q(t)$ конденсатора со временем. По определению, сила тока в цепи

$I=\frac{∆q}{∆t}$ , (1)

где $∆q$ – малое изменение (в данном случае убыль) заряда конденсатора за малый промежуток времени $∆t$.

 Сила Ампера, разгоняющая стержень в этот момент

$F\_{A}=IBl=\frac{∆q}{∆t}Bl$ . (2)

Согласно второму закону Ньютона в импульсной форме сила Ампера за малый промежуток времени $∆t$ увеличит скорость движения стержня на малую величину $∆υ$, причём

$F\_{A}∆t=-\frac{∆q}{∆t}Bl∆t=m∆υ$ . (3)

Из (3) понятно, что малое приращение (увеличение) скорости стержня $∆υ$ связано с малым приращением (убылью) заряда конденсатора $∆q$ следующим образом

$∆υ=-\frac{Bl}{m}∆q$. (4)

Суммируя малые приращения $∆υ$ скорости стержня, найдём его скорость в момент, когда заряд конденсатора уменьшился от значения $q\_{0}$ до некоторого значения $q$.

$υ=\sum\_{i}^{}∆υ\_{i}=-\frac{Bl}{m}\sum\_{i}^{}∆q\_{i}=-\frac{Bl}{m}\left(q-q\_{0}\right)=\frac{Bl}{m}\left(q\_{0}-q\right)$ . (5)

Как следует из (4), по мере разгона стержня (𝜐$\uparrow $) заряд ($q\downright $) и напряжение ($U\downright $) на конденсаторе убывают.

*D*

*A*

$$\vec{υ}$$

*C*

$$\vec{g}$$

$$\vec{B}$$

$$Рис. 18$$

При этом на концах стержня индуцируется возрастающая ЭДС обратной полярности (согласно правилу Ленца)

$ϵ\_{i}=υBl$. (6)

Следовательно, в какой-то момент времени ЭДС индукции $ϵ\_{i}$ станет равна по модулю остаточному напряжению $U\_{min}$ на конденсаторе, после чего ток в цепи исчезнет, поскольку суммарное напряжение в контуре будет равно нулю

$υ\_{max}Bl=U\_{min}=\frac{q\_{min}}{C}$ . (7)

Подставляя в (7) значение скорости (5), найдем установившееся значение заряда $q\_{min}$ на конденсаторе

$\frac{Bl}{m}\left(q\_{0}-q\_{min}\right)Bl=\frac{q\_{min}}{C}$ , (8)

откуда

$q\_{min}=\frac{B^{2}l^{2}C}{m+B^{2}l^{2}C}q\_{0}=\frac{B^{2}l^{2}C^{2}U\_{0}}{m+B^{2}l^{2}C}$ . (9)

Используя (9) и (5), находим окончательную скорость стержня после окончания разгона

 $υ\_{max}=\frac{CBlU\_{0}}{m+B^{2}l^{2}C}=1,0 м/с$ . (10)

При этом остаточное значение напряжения $U\_{min}$ на конденсаторе можем найти как отношение остаточного (минимального) заряда $q\_{min}$ конденсатора к его электроёмкости

$U\_{min}=\frac{q\_{min}}{C}=Blυ\_{max}=\frac{B^{2}l^{2}CU\_{0}}{m+B^{2}l^{2}C}=6,1 В$. (11)