**Возможные решения задач**

**2018/2019**

**11 класс**

**11-1.** **«Трёхмерное движение»** Рассмотрим движение материальной точки в плоскости по приведенным в условии законам

(1)

. (2)

Используем аналогию между колебательным и вращательным движением по окружности. Пусть материальная точка равномерно вращается по окружности радиуса (Рис. 12) с угловой скоростью против часовой стрелки из начального положения . Тогда её линейная скорость движения равна . За промежуток времени точка повернется на угол , а её координаты и в момент времени будут совпадать с (1) и (2).

𝜐

*x*

*y*

Рис. 12

Следовательно, движение точки в данной плоскости является равномерным вращением вокруг точки начала координат со скоростью . Соответственно, проекции мгновенной скорости точки на оси координат через промежуток времени найдём из чертежа

, (3)

. (4)

Движение точки вдоль оси описывается зависимостью

, (5)

т.е. является равномерным со скоростью

. (6)

Мысленно «совмещая» два движения, получаем, что точка движется по винтовой линии (Рис. 13), ось которой совпадает с осью декартовой системы координат. Винтовая линия (иногда, не совсем корректно её называют «спиралью») характеризуется радиусом и шагом (см. Рис. 13). В нашем случае её характерные особенности

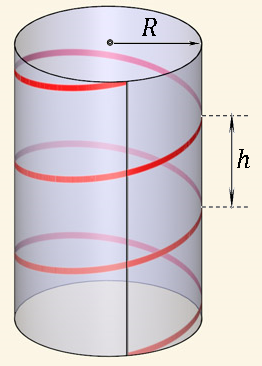


Рис. 13

, а , (7)

где – период обращения точки по окружности.

Используя «трёхмерную» теорему Пифагора найдем модуль скорости материальной точки в момент времени

. (8)

Подставляя в (8) выражения для скоростей (3), (4) и (6) получим

. (9)

Как следует из (9), данное движение материальной точки является равномерным (и криволинейным), поскольку . Следовательно, искомый путь материальной точки

. (10)

Поскольку за промежуток времени материальная точка сделает ровно один оборот, то модуль её перемещения равен шагу винтовой линии

. (11)

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные расчёты приводим с точностью до трёх значащих цифр.

**11-2.** **«Гибкая цепочка»** В первом случае (нить привязана в точке цепочки), цепочка движется поступательно, следовательно, её можно заменить грузом массой , который скользит по гладкой горизонтальной поверхности. В этом случае движение системы будет равноускоренным (Рис. 14 а)).



*B*

*A*

*C*

*A*

*B*

*а)*

*б)*

Ускорение системы в этом случае найдем из второго закона Ньютона, записанного для движения груза и цепочки. Поскольку нить нерастяжима и невесома, то модули ускорений и модули сил упругости нити для цепочки и для гири одинаковы () . Следовательно

, (1)

, (2)

где – модуль силы упругости (натяжения) нити.

Решение системы (1) – (2) даёт

, (3)

. (4)

Следовательно, время , за которое гиря опустится на расстояние , найдем из равенства

. (5)

Во втором случае (нить привязана в точке цепочки) цепочка при движении начинает заворачиваться, и при этом изменяется её импульс, поскольку одна часть цепочки уже движется, а вторая – ещё нет (Рис. 14 а)).

Для таких систем (систем с переменной массой) вместо традиционной формы записи основного закона динамики () следует использовать более общую форму – импульсную

*С*









⟹ , (6)

где – изменение импульса системы за промежуток времени .

Пусть на конец цепочки (Рис. 15) действует постоянная сила , направленная вправо. Заметим, что если конец нерастяжимой цепочки под действием силы движется с некоторой скоростью , то точка её перегиба (см. Рис. 15) движется со скоростью . Следовательно, за промежуток времени в движение со скоростью придет часть цепочки массой . Импульс этой подвижной части цепочки к моменту времени будет равен изменению импульса системы

. (7)

Подставляя (7) в (6), получаем

, (8)

откуда находим скорость установившегося движения конца цепочки

. (9)

В нашем случае , следовательно

. (10)

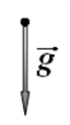
Пренебрегая временем установления скорости (что вполне допустимо для цепочек с «мелким» звеном), найдём искомое время

. (11)

Из сравнения (11) и (5) получаем окончательный ответ

. (12)

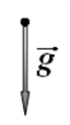
**11-3.** **«Двойной математический маятник»** Отклоним двойной математический маятник на угол от вертикали. Поскольку при этом мы совершаем работу по поднятию грузов, то потенциальная энергия системы увеличится на



. (1)

Если отпустить маятник, то он придет в движение, в процессе которого его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию вращательного движения. Соответственно, в нижней точке колебаний для кинетической энергии системы можем записать

. (2)

Согласно закону сохранения энергии приравняем (1) и (2) и выразим угловую скорость вращения двойного математического маятника в нижней точке траектории

. (3)

Подберём длину математического маятника таким образом, чтобы в нижней точке (а значит и в любой!) траектории его угловая скорость вращения была равна (3) (т.н. «синхронный» математический маятник). Тогда период малых колебаний синхронного математического маятника будет равен периоду колебаний рассматриваемого маятника.

Повторяя рассуждения, аналогичные (1) – (2), для математического маятника получим

. (4)

Сравнивая (3) и (4), находим, что длина синхронного маятника в данном случае равна

. (5)

Следовательно, период колебаний двойного математического маятника равен

= . (6)

Расчёт по формуле (6) для данных, приведенных в условии, даёт

. (7)

**11-4.** **«Лестничные циклы»** Для нахождения коэффициента полезного действия

*0*

Рис. 17

цикла необходимо вычислить работу , совершенную газом за весь цикл и количество теплоты , полученное идеальным одноатомным газом от нагревателя.

Учитывая, что площадь одного треугольника на рисунке , то работа газа за весь цикл

. (1)

Для нахождения количества теплоты воспользуемся первым началом термодинамики

, (2)

где – изменение внутренней энергии газа на участке, где работает нагреватель, а – работа газа на этом же участке.

Работа газа равна площади трапеции , отмеченной на рисунке

. (3)

Изменение внутренней энергии идеального одноатомного газа на этом участке

. (4)

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем окончательную формулу

. (5)

При получаем

. (6)

Как следует из (6) , такого цикла достаточно мал и примерно равен плохонького паровоза…☺

**11-5.** **«Одноразовый ускоритель»** Поскольку конденсатор заряжен, то по цепи пойдет электрический ток, который будет уменьшать заряд конденсатора со временем. По определению, сила тока в цепи

, (1)

где – малое изменение (в данном случае убыль) заряда конденсатора за малый промежуток времени .

Сила Ампера, разгоняющая стержень в этот момент

. (2)

Согласно второму закону Ньютона в импульсной форме сила Ампера за малый промежуток времени увеличит скорость движения стержня на малую величину , причём

. (3)

Из (3) понятно, что малое приращение (увеличение) скорости стержня связано с малым приращением (убылью) заряда конденсатора следующим образом

. (4)

Суммируя малые приращения скорости стержня, найдём его скорость в момент, когда заряд конденсатора уменьшился от значения до некоторого значения .

. (5)

Как следует из (4), по мере разгона стержня (𝜐) заряд () и напряжение () на конденсаторе убывают.

*D*

*A*

*C*

При этом на концах стержня индуцируется возрастающая ЭДС обратной полярности (согласно правилу Ленца)

. (6)

Следовательно, в какой-то момент времени ЭДС индукции станет равна по модулю остаточному напряжению на конденсаторе, после чего ток в цепи исчезнет, поскольку суммарное напряжение в контуре будет равно нулю

. (7)

Подставляя в (7) значение скорости (5), найдем установившееся значение заряда на конденсаторе

, (8)

откуда

. (9)

Используя (9) и (5), находим окончательную скорость стержня после окончания разгона

. (10)

При этом остаточное значение напряжения на конденсаторе можем найти как отношение остаточного (минимального) заряда конденсатора к его электроёмкости

. (11)